Math. Nachr. 133 (1987) 91–105

Equivalences compactes entre deux operateurs fermes sur un espace de HILBERT

Dédié au Professeur Hans Triebel à l'occasion de son cinquantième anniversaire

Par JEAN-PHILIPPE LABROUSSE et BRIGITTE MERCIER de Nice

(Reçu le 23 Avril 1986)

Let H be a HILBERT space, let $\mathcal{C}(H)$ denote the set of all closed densely defined linear operators on H and let $\mathcal{L}(H)$ denote the set of all bounded elements of $\mathcal{C}(H)$. If $A, B \in \mathcal{L}(H)$, set: $A \sim B$ iff $A - B$ is compact. Then $\sim$ is an equivalence relation on $\mathcal{L}(H)$ and many results have been stated and proved making use of this equivalence relation (e.g. correction of spectra by compact perturbations, CALKIN algebras . . . etc . . .). The aim of the present paper is to show that it is possible to extend $\sim$ to the whole of $\mathcal{C}(H)$ in such a way that (after suitable modifications) most of the results referred to above on $\mathcal{L}(H)$ are still true on $\mathcal{C}(H)$.

§ 0. Introduction

Soit H un espace de HILBERT sur C. Notons $\mathcal{C}(H)$ l'espace des opérateurs linéaires A, de domaine $D(A)$ dense dans H, d'image $R(A)$ contenue dans H et de graphe $G(A)$ fermé dans $H \times H$. Notons $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des éléments bornés de $\mathcal{C}(H)$ et $\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des éléments compacts de $\mathcal{L}(H)$. Si $A \in \mathcal{C}(H)$ notons $N(A)$ son noyau et $N(A)^{\perp}$ l'orthogonal de $N(A)$. Alors $c(A)$, la conorme de A, est définie par:

$$c(A) = \inf_{u \in D(A) \cap N(A)^{\perp}} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

Proposition 0.1 (cf [6]). *Si* $A \in \mathcal{C}(H)$ *alors:*

$$R(A) \text{ fermée} \Leftrightarrow c(A) > 0 .$$

Si A^* *est l'adjoint de* A $c(A^*) = c(A)$:

Definition 0.1 $A \in \mathcal{C}(H)$ est dit « de FREDHOLM » (noté $A \in \mathcal{F}(H)$) si:

a) $R(A)$ est fermée

b) $\dim N(A) < \infty$; $\operatorname{codim} R(A) < \infty$

Alors $\chi(A)$, l'indice de A est défini par

$$\chi(A) = \dim N(A) - \operatorname{codim} R(A) .$$

Proposition 0.2 (cf [6]). *Si* $A\in\mathcal{F}(H)$ *alors:*

$$A^*\in\mathcal{F}(H);\quad \chi(A^*)=-\chi(A)\ .$$

Definition 0.2 *Si* $A\in\mathcal{C}(H)$ *posons:*

$$\varrho_e(A)=\{\lambda\in C\mid A-\lambda I\in\mathcal{F}(H)\}$$

$$\sigma_e(A)=C\backslash\varrho_e(A)\ .$$

$\varrho_e(A)$ et $\sigma_e(A)$ sont appelés respectivement l'ensemble résolvant essentiel et le spectre essentiel de A.

Theoreme 0.1. (cf [2]) $\forall A\in\mathfrak{L}(H)\cap\mathcal{F}(H)\ \exists\delta>0$ *tel que* $\forall B\in\mathfrak{L}(H)\ \|A-B\|<\delta\Rightarrow\Rightarrow B\in\mathcal{F}(H)$ *et* $\chi(B)=\chi(A)$. *Ce résultat a été généralisé successivement dans* [10] *et* [16].

Corollaire 0.1 $\chi\,(A-\lambda I)$ *est constant sur chaque composante connexe de* $\varrho_e(A)$.

Avant d'énoncer le théorème 0.1 sous sa forme la plus générale, il faut introduire une métrique g sur $\mathcal{C}(H)$.

Definition 0.3 (cf [9]). Soit A, $B\in\mathcal{C}(H)$ et notons $P_{G(A)}$ (resp. $P_{G(B)}$) la projection orthogonale dans $H\times H$ sur $G(A)$ (resp. sur $G(B)$). Alors posons:

$$\delta(A,B)=\|(I-P_{G(B)})\,P_{G(A)}\|$$

$$g(A,B)=\|P_{G(A)}-P_{G(B)}\|\ .$$

Proposition 0.3 (*cf* [8], [12], [14]). *Si* A, $B\in\mathcal{C}(H)$ *on a:*

$$\delta(A,B)=\delta(B^*,A^*) \tag{0.1}$$

$$g(A,B)=\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}=g(A^*,B^*)\ . \tag{0.2}$$

Proposition 0.4. (*cf* [4], [12])

(0.3) *Si* $A\in\mathcal{C}(H)$, $T\in\mathfrak{L}(H)$ *alors* $g(A,A+T)\leqq\|T\|$

Si $A\in\mathfrak{L}(H)$, $B\in\mathcal{C}(H)$ *avec* $g(A,B)<1/\sqrt{1+\|A\|^2}$

(0.4) *alors*: $B\in\mathfrak{L}(H)$ *et* $\|A-B\|\leqq\sqrt{1+\|A\|^2}\,\sqrt{1+\|B\|^2}\,g(A,B)$.

Theoreme 0.2 (*cf* [4]) (*Premier théorème de stabilité*). $\forall A\in\mathcal{F}(H)\ \forall B\in\mathcal{C}(H)$

$$g(A,B)<\frac{c(A)}{\sqrt{1+c^2(A)}}\Rightarrow B\in\mathcal{F}(H)\quad et\quad \chi(B)=\chi(A)\ .$$

Un autre type de stabilité pour $\mathcal{F}(H)$ a été établi dans [2]:

Theoreme 0.3. $\forall A\in\mathfrak{L}(H)\cap\mathcal{F}(H);\ \forall K\in\mathcal{K}(H)$

$$B=A+K\in\mathcal{F}(H)\quad et\quad \chi(B)=\chi(A)\ .$$

Ce résultat a été généralisé dans [16] et peut également s'énoncer sous la forme équivalente:

Theoreme 0.4 $\forall A\in\mathfrak{L}(H)\cap\mathcal{F}(H)\ \forall B\in\mathfrak{L}(H)$

$$A-B\in\mathcal{K}(H)\Rightarrow B\in\mathcal{F}(H)\quad et\quad \chi(B)=\chi(A)\ .$$

C'est sous cette forme que nous nous proposons d'étendre à $\mathcal{C}(H)$ ce deuxième théorème de stabilité.

Dans ce but nous rappelons au § 1 un certain nombre de définitions et de résultats déjà connus. Au § 2 nous donnons les démonstrations de propositions tirées pour la plupart de [15]. Au § 3 on trouvera les résultats permettant de donner la définition d'équivalence compacte forte et de démontrer le deuxième théorème de stabilité sur $\mathcal{C}(H)$ (théorème 3.1). Enfin au § 4 nous énonçons la généralisation à $\mathcal{C}(H)$ d'un des résultats de [3] sur les opérateurs essentiellement normaux de $\mathfrak{L}(H)$, dont la démonstration est dans [15]. En outre on trouvera dans ce paragraphe l'annonce d'autres résultats dont la démonstration fera l'objet d'un travail ultérieur à paraître.

§ 1. Quelques resultats auxiliaires

Proposition 1.1 (*cf* [4], [17]). *Soit* $A \in \mathcal{C}(H)$. *Alors* $R_A = (I + A^*A)^{-1}$ *est un opérateur symétrique positif dont l'image est dense et égale à* $D(A^*A)$. *En outre:*

(1.1) $\quad A^*AR_A = I - R_A$

et si $u \in D(A)$ *on a*

(1.2) $\quad R^*Au = AR_Au$.

On en déduit que:

(1.3) $\quad (AR_A)^* = A^*R_{A^*}$

et que $\forall u \in H \left\| \left(\frac{1}{2} - R_A\right) u \right\|^2 + \|AR_Au\|^2 = \frac{1}{4} \|u\|^2,$

(1.4) $\quad \left(d'où\ \|R_A\| \leqq 1\ ;\ \|AR_A\| \leqq \frac{1}{2}\right)$.

Proposition 1.2 (*cf* [4], [12]). *Soit* $S_A = \sqrt{R_A}$, *la racine carrée symétrique et positive de* R_A. *Alors* $R(S_A) = D(A)$ *et si* $u \in D(A)$ *on a* $S_{A^*}Au = AS_Au$.

On en déduit comme précédemment que:

(1.5) $\quad (AS_A)^* = A^*S_{A^*}$

et que

(1.6) $\quad \forall u \in H\ \|S_Au\|^2 + \|AS_Au\|^2 = \|u\|^2$

(1.7) $\quad (d'où\ \|S_A\| \leqq 1\ ;\ \|AS_A\| \leqq 1)$.

Proposition 1.3 (*cf* [19], [4]). *Si* $A \in \mathcal{C}(H)$ *on a:*

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^*R_{A^*} \\ AR_A & I - R_A \end{pmatrix} \quad sur \quad H \times H .$$

Proposition 1.4 *Si* $A,\ B \in \mathcal{C}(H)$ *on a:*

$$(I - P_{G(B)})\, P_{G(A)} = \begin{pmatrix} S_B & B^*S_{B^*} \\ BS_B & -S_{B^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ BS_BS_A - S_{B^*}AS_A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_A & A^*S_{A^*} \\ AS_A & -S_{A^*} \end{pmatrix}.$$

Demonstration. Simple vérification en utilisant (1.1), (1.2) et (1.5).

De même il est facile de vérifier que si $T\in\mathcal{C}(H)$ l'opérateur $\begin{pmatrix} S_T & T^*S_{T^*} \\ TS_T & -S_{T^*}\end{pmatrix}$ défini sur $H\times H$ est unitaire et symétrique.

Corollaire 1.1. *(cf [12]). Si A, $B\in\mathcal{C}(H)$ on a:*

(1.8) $\qquad \delta(A, B)=\|BS_BS_A-S_{B^*}AS_A\|$

(1.9) $\qquad g(A, B)=\max\{\|AS_AS_B-S_{A^*}BS_B\|, \|BS_BS_A-S_{B^*}AS_A\|\}$.

Proposition 1.5 *Soit A, $B\in\mathcal{C}(H)$, $T\in\mathfrak{L}(H)$; alors $\forall u\in H$ $\{S_Au, AS_Au+TS_Au\}\in$ $\in G(A+T)$ et si on pose $\varrho=\frac{\|T\|}{2}+\sqrt{1+\frac{\|T\|^2}{4}}$ on a:*

a) $\|u\|\leqq\varrho\,\|\{S_Au, (A+T)\,S_Au\}\|$

b) $\|(I-P_{G(B+T)})\,P_{G(A+T)}\,\{S_Au, (A+T)\,S_Au\}\|\leqq\varrho\,\|(BS_BS_A-S_{B^*}AS_A)\,u\|$ (1.9).

Demonstration.

a) $\|u\|^2=\|S_Au\|^2+\|AS_Au\|^2=\|S_Au\|^2+\|(A+T)\,S_Au-TS_Au\|^2$
$\leqq\|S_Au\|^2+\|(A+T)\,S_Au\|^2+\|TS_Au\|^2+2\,\|(A+T)\,S_Au\|\,\|TS_Au\|$.

Si $\alpha\in\boldsymbol{R}^+$ on obtient:

$$\|u\|^2\leqq(1+\|T\|^2+\alpha\|T\|^2)\,\|S_Au\|^2+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\|(A+T)\,S_Au\|^2 .$$

En choissant α tel que $1+\|T\|^2+\alpha\|T\|^2=1+\frac{1}{\alpha}$ on trouve $\alpha=\left(-\frac{\|T\|}{2}+\sqrt{1+\frac{\|T\|^2}{4}}\right)/\|T\|$, d'où

$$\|u\|^2\leqq\varrho^2\,(\|S_Au\|^2+\|(A+T)\,S_Au\|^2)=\varrho^2\,\|\{S_Au, (A+T)\,S_Au\}\|^2$$

b) $\|(I-P_{G(B+T)})\,P_{G(A+T)}\,\{S_Au, (A+T)\,S_Au\}\|$
$\leqq\|\{S_Au, (A+T)\,S_Au\}-\{S_Bv, (B+T)\,S_Bv\}\|$ quel que soit v.

Si, en particulier, on prend $v=S_BS_Au+B^*S_{B^*}AS_Au$ on trouve:

$$S_Au-S_Bv=(I-R_B)\,S_Au-S_BB^*S_{B^*}AS_Au=B^*S_{B^*}\,(BS_BS_A-S_{B^*}AS_A)\,u$$
$$AS_Au-BS_Bv=AS_Au-BR_BS_Au-(I-R_{B^*})\,AS_Au$$
$$=-S_{B^*}\,(BS_BS_A-S_{B^*}AS_A)\,u .$$

Donc, en posant $w=(BS_BS_A-S_{B^*}AS_A)u$.

$$\|(I-P_{G(B+T)})\,P_{G(A+T)})\,\{S_Au, (A+T)\,S_Au\}\|^2\leqq\|S_Au-S_Bv\|^2$$
$$+\|AS_Au-BS_Bv+T\,(S_Au-S_Bv)\|^2$$
$$\leqq\|B^*S_{B^*}w\|^2+\|S_{B^*}w\|^2+\|T\|^2\,\|B^*S_{B^*}w\|^2+2\|T\|\,\|S_{B^*}w\|\,\|B^*S_{B^*}w\|$$

et en procédant comme plus haut

$$\|(I-P_{G(B+T)})\,P_{G(A+T)}\,\{S_Au, (A+T)\,S_Au\}\|$$
$$\leqq\varrho^2\,(\|B^*S_{B^*}w\|^2+\|S_{B^*}w\|^2)=\varrho^2\|w\|^2 .$$

Corollaire 1.2 Soit A, $B\in\mathcal{C}(H)$, $T\in\mathfrak{L}(H)$; alors

$$\delta\,(A+T, B+T)\leqq\varrho^2\delta(A, B) .$$

Demonstration. Soit $\{f, g\} \in H \times H$. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que

$$P_{G(A+T)} \{f, g\} = \{S_A u, (A+T) S_A u\}$$

et

$$\|\{S_A u, (A+T) S_A u\}\| \leqq \|P_{G(A+T)} \{f, g\}\| \leqq \|f, g\}\| .$$

Donc

$$\|(I - P_{G(B+T)}) P_{G(A+T)} \{f, g\}\| \leqq \varrho \, \|(BS_B S_A - S_{B^*} A S_A) u\|$$
$$\leqq \varrho \delta(A, B) \|u\| \leqq \varrho^2 \delta(A, B) \|\{f, g\}\| ,$$

d'où le corollaire.

Corollaire 1.3. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$, $T \in \mathfrak{L}(H)$; alors

$$g(A+T, B+T) \leqq \varrho^2 g(A, B) .$$

Demonstration. Conséquence immédiate du corollaire précédent et de (1.9).

§ 2. L'Equivalence compacte faible

Definition 2.1 Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$. Nous dirons que A et B sont faiblement compact-équivalents (et nous écrivons $A \sim B$) si $P_{G(A)} - P_{G(B)}$ est un opérateur compact sur $H \times H$.

Remarque 2.1 $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(H)$.

Remarque 2.2. La proposition 1.3 montre que $A \sim B \Rightarrow R_A - R_B \in \mathcal{K}(H)$.

Proposition 2.1 (*cf.* [15]). *Soit* $A, B \in \mathcal{C}(H)$; *alors*

$$A \sim B \Leftrightarrow A^* \sim B^* .$$

Demonstration. Sur $H \times H$ notons J *l'opérateur* $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}(H \times H)$. Alors on vérifie facilement que:

$$P_{G(A^*)} - P_{G(B^*)} = J (P_{G(B)} - P_{G(A)}) J^* .$$

Remarque 2.3. En vertu de la proposition 1.4 il est facile de constater que:

$$A \sim B \Leftrightarrow \begin{cases} AS_A S_B - S_{A^*} B S_B \in \mathcal{K}(H) \\ BS_B S_A - S_{B^*} A S_A \in \mathcal{K}(H) \end{cases} \qquad (2.1)$$

car

$$P_{G(A)} - P_{G(B)} = (I - P_{G(B)}) P_{G(A)} - P_{G(B)} (I - P_{G(A)})$$
$$= (I - P_{G(B)}) P_{G(A)} - [(I - P_{G(A)}) P_{G(B)}]^* .$$

Proposition 2.2 (*cf.* [15]). *Soit* $A, B \in \mathfrak{L}(H)$; *alors*

$$A - B \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow A \sim B .$$

Demonstration

$$B \in \mathfrak{L}(H) \Rightarrow BS_B S_A - S_{B^*} A S_A = S_{B^*} (A - B) S_A \in \mathcal{K}(H) .$$

Par symétrie entre A et B : $AS_A S_B - S_A \, BS_B \in \mathcal{K}(H)$ et la proposition découle de (2.1).

Definition 2.2. Soit A, $T \in \mathcal{C}(H)$ tels que:

$$D(T) \supseteq D(A); \quad TS_A \in \mathcal{K}(H) .$$

Nous dirons alors que T est A-compact.

Remarque 2.4. Il est facile de voir (cf [15]) que cette définition de l'A-compacité est équivalente à celle donnée dans [8]. En particulier il en découle que si A, $B \in \mathcal{C}(H)$ et $A - B$ est A-compact, alors $D(A) = D(B)$ et $A - B$ est B-compact.

Proposition 2.3 (*cf.* [15]). *Soit A, $B \in \mathcal{C}(H)$; alors:*

$$A - B \text{ est } A\text{-compact} \Rightarrow A \sim B .$$

Demonstration. Identique à celle de la proposition précédente.

Remarque 2.5. L'équivalence compacte faible généralise strictement les relations d'équivalences induites par les deux types de « différence compacte » que nous venons de considérer. En effet, si $H = l^2$ et si $\{e_n\}$ denote la base canonique de H, posons: $\forall n \in \mathbf{N}: Ae_{2n} = n^2 e_{2n}$;

$$Ae_{2n+1} = (n+1)\, e_{2n+1} \quad (\text{donc } A = A^*)$$

$\forall n \in \mathbf{N}$ $Te_{2n} = ne_{2n+1}$; $Te_{2n+1} = e_{2n+2}$ et $B = A + T$. Alors TS_A est compact (donc T est A-compact) et $A \sim B$. Par conséquent $A^* \sim B^*$ et cependant, comme il est facile de le vérifier, $B^* - A^*$ n'est pas A^* compact.

Proposition 2.4 (*cf.* [15]). *Soit A, $B \in \mathcal{C}(H)$ $\forall \lambda \in C$ $A \sim B \Rightarrow \lambda A \sim \lambda B$.*

Demonstration. On a $S_{A^*} S_{\bar{\lambda} A^*} = S_{\bar{\lambda} A^*} S_{A^*}$. Donc si $u \in D(A)$ $S_{A^*} \lambda A S_{\lambda A} u = S_{A^*} \lambda S_{\bar{\lambda} A^*} A u = \lambda S_{\bar{\lambda} A^*} S_{A^*} A u = \lambda S_{\bar{\lambda} A^*} A S_A u$. Comme $D(A)$ est dense dans H, on en déduit que $\lambda A S_{\lambda A} = \lambda S_{A^*}^{-1} S_{\bar{\lambda} A^*} A S_A$. Donc

$$\begin{aligned} \lambda A S_{\lambda A} S_{\lambda B} - S_{\bar{\lambda} A^*} \lambda B S_{\lambda B} &= \lambda S_{A^*}^{-1} S_{\bar{\lambda} A^*} A S_A S_B S_B^{-1} S_{\lambda B} - \lambda S_{A^*}^{-1} S_{\bar{\lambda} A^*} S_{A^*} B S_B S_B^{-1} S_{\lambda B} \\ &= \lambda S_{A^*}^{-1} S_{\bar{\lambda} A^*} (A S_A S_B - S_{A^*} B S_B)\, S_B^{-1} S_{\lambda B} \end{aligned}$$

est compact. En utilisant la symétrie des hypothèses en A et B on conclut la démonstration de la proposition.

Proposition 2.5 (*cf.* [15]). *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, $B \in \mathcal{C}(H)$; alors $A \sim B \Rightarrow B \in \mathcal{L}(H)$ et $A - B \in \mathcal{K}(H)$.*

Demonstration. $A \sim B \Rightarrow A S_A S_B - S_{A^*} B S_B \in \mathcal{K}(H)$ et comme $A \in \mathcal{L}(H)$ $S_{A^*}(A - B)\, S_B \in \mathcal{K}(H)$. Comme $S_{A^*}^{-1}$ est borné on en déduit de $(A - B)\, S_B \in \mathcal{K}(H)$, donc $A - B$ est B-compact d'où $D(B) = D(A) = H$. Donc $B \in \mathcal{L}(H)$ et par conséquent S_B^{-1} est borné, d'où $A - B \in \mathcal{K}(H)$.

Proposition 2.6 (*cf.* [15]). *Soit $A \in \mathcal{F}(H)$, $B \in \mathcal{C}(H)$; alors $A \sim B \Rightarrow B \in \mathcal{F}(H)$.*

Demonstration. Montrons d'abord que:

$$(2.2) \qquad \forall u \perp N(A)\ \|(I - P_{G(A)})\, \{u,\ 0\}\| \geq \frac{c(A)}{\sqrt{1 + c^2(A)}}\, \|u\| .$$

En effet:

$\|(I-P_{G(A)})\{u,0\}\|^2=\|\{(I-R_A)\ u, -AR_Au\}\|^2=\|(I-R_A)\ u\|^2+\|AR_Au\|^2=\|AS_Au\|^2$.

Or $u\perp N(A)\Rightarrow S_Au\perp N(A)$ d'où $\|AS_Au\|^2\geqq c^2(A)\,\|S_Au\|^2=c^2(A)\,\|u\|^2-c^2(A)\,\|AS_Au\|^2$ d'où on déduit (2.2).

Montrons maintenant que $\dim N(B)<\infty$. Soit $\{u_n\}$ une suite bornée dans $N(B)\cap N(A)^\perp$. Alors:

$(I-P_{G(A)})\{u_n,0\}=(P_{G(B)}-P_{G(A)})\{u_n,0\}$ et comme $P_{G(B)}-P_{G(A)}$ est compact il existe une sous-suite — notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité — telle que $(I-P_{G(A)})\{u_n,0\}$ soit convergente, ce qui avec (2.2) entraîne que $\{u_n\}$ est convergente et par conséquent que $\dim N(B)\cap N(A)^\perp<\infty$. Comme par hypothèse $\dim N(A)<\infty$ on trouve bien que $\dim N(B)<\infty$.

Montrons maintenant que $R(B)$ est fermé. Pour celà, comme $\dim\,(N(A)+N(B))<\infty$ il suffit de montrer que la restriction de B à $(N(A)+N(B))^\perp$ a une image fermée.

Soit donc $\{u_n\}\subseteqq(N(A)+N(B))^\perp\cap D(B)$ telle que $\{Bu_n\}\to f$. Supposons que $\{u_n\}$ ne soit pas bornée: alors il existe une sous-suite — notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité — telle que $\|u_n\|\uparrow\infty$. En outre:

$$(2.3)\qquad (I-P_{G(A)})\{u_n,0\}=(P_{G(B)}-P_{G(A)})\{u_n,Bu_n\}-(I-P_{G(A)})\{0,Bu_n\}.$$

En divisant par $\|u_n\|$ et en tenant compte du fait que $\{u_n/\|u_n\|, Bu_n/\|u_n\|\}$ est bornée on déduit qu'il existe une sous-suite — notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité — telle que $(P_{G(B)}-P_{G(A)})\{u_n/\|u_n\|, Bu_n/\|u_n\|\}$ converge quand $n\to\infty$. Donc $(I-P_{G(A)})\{u_n/\|u_n\|,0\}$ converge et par conséquent en vertu de (2.2), $\{u_n/\|u_n\|\}$ converge vers u, $\{Bu_n/\|u_n\|\}$ converge vers 0 d'où $Bu=0$ et comme $u\perp N(B)$, $u=0$ contradiction avec $\|u\|=1$. Donc $\{u_n\}$ est bornée et à partir de (2.3) on déduit encore qu'il existe une sous-suite — notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité — telle que $(P_{G(B)}-P_{G(A)})\{u_n,Bu_n\}$ soit convergente et par conséquent telle que $(I-P_{G(A)})\{u_n,0\}$ soit convergente d'où finalement $\{u_n\}$ converge vers u et $f=Bu$ ce qui complète la démonstration de la proposition.

Proposition 2.7 (*cf.* [15]). *Soit* $A, B\in\mathcal{C}(H)$; *alors*

$$A\sim B\Rightarrow\begin{cases}I+A^*B,\quad I+BA^*,\quad I+B^*A,\quad I+AB^*\in\mathcal{F}(H) & (2.4)\\ (I+A^*B)^*=I+B^*A;\ (I+BA^*)^*=I+AB^* & (2.5)\\ \chi\,(I+A^*B)=\chi\,(I+BA^*)=-\chi\,(I+B^*A)=-\chi\,(I+AB^*). & (2.6)\end{cases}$$

Demonstration. $A\sim B\Rightarrow P_{G(A)}-P_{G(B)}$ compact $\Rightarrow I-P_{G(A)}+P_{G(B)}\in\mathcal{F}\,(H\times H)\Rightarrow R\,(I-P_{G(A)}+P_{G(B)})$ fermée, et en utilisant le corollaire 3 de [5] on en déduit que $G(A)^\perp+G(B)$ est fermé. On voit de même que $I-P_{G(B)}+P_{G(A)}\in\mathcal{F}\,(H\times H)$ et on en déduit que $G(A)^\perp\cap G(B)\subseteqq N\,(I-P_{G(B)}+P_{G(A)})$ est de dimension finie. Or $\{u,v\}\in G(A)^\perp\cap G(B)\Rightarrow u\in D(B)$, $v=Bu\in D(A^*)$, $A^*v=-u$, d'où: $(I+A^*B)\ u=0$ et $(I+BA^*)\ v=0$. Inversement $u\in N\,(I+A^*B)\Rightarrow v=Bu\in N\,(I+BA^*)$ et $\{u,v\}\in G(A)^\perp\cap G(B)$. Donc

$$(2.7)\qquad \dim N\,(I+A^*B)=\dim N\,(I+BA^*)=\dim G(A)^\perp\cap G(B)<\infty$$

Par symétrie des hypothèses en A et B on trouve de même:

(2.8) $$\dim N(I+B^*A)=\dim N(I+AB^*)=\dim G(A)\cap G(B)^\perp<\infty$$

Soit maintenant $f\perp N(I+B^*A)$. Alors $\{f,0\}\perp G(A)\cap G(B)^\perp$ d'où (cf. [14] Chap. I) $\{f,0\}\in G(A)^\perp+G(B)$. Donc:

$$\exists u\in D(B),\quad \exists v\in D(A^*)\quad \text{tels que}\quad f=A^*v+u\,;\ 0=-v+Bu$$

ou encore $u\in D(A^*B)$ et $f=(I+A^*B)u$, ce qui montre que $N(I+B^*A)^\perp\subseteqq R(I+A^*B)$ et comme l'inclusion contraire est évident on a:

(2.9) $$R(I+A^*B)=N(I+B^*A)^\perp$$

d'où $R(I+A^*B)$ est fermée.

Par symétrie en A et B on trouve aussi:

(2.10) $$R(I+B^*A)=N(I+A^*B)^\perp\quad \text{est fermée.}$$

On en déduit (cf. [14], Prop. 2.2.3) que $I+A^*B$ et $I+B^*A$ sont des opérateurs fermés.

Montrons maintenant que $D(I+A^*B)$ est dense dans H. Soit $u\in H$ tel que $\forall w\in D(I+A^*B)$ $(u,w)=0$. Alors $u\perp N(I+A^*B)$ et $\exists v$ tel que $u=(I+B^*A)v$. D'où:

$$\forall w\in D(I+A^*B)\ (u,v)=((I+B^*A)v,w)=(v,(I+A^*B)w)=0$$

Donc $v\perp R(I+A^*B)\Rightarrow v\in N(I+B^*A)\Rightarrow u=0$. On voit donc que $I+A^*B$, $I+B^*A\in\mathcal{F}(H)$.

En outre

$$N((I+A^*B)^*)=R(I+A^*B)^\perp=N(I+B^*A)$$
$$R((I+A^*B)^*)=N(I+A^*B)^\perp=R(I+B^*A)\,.$$

Comme évidemment $(I+B^*A)\subseteqq(I+A^*B)^*$ on voit qu'on a en fait $I+B^*A=(I+A^*B)^*$.

Soit enfin $g\perp N(I+AB^*)$. Alors $\{o,g\}\perp G(A)\cap G(B)^\perp$ et en procédant comme nous venons de le faire nous en déduisons que

$$I+AB^*,\quad I+BA^*\in\mathcal{F}(H)$$

et que

$$(I+AB^*)^*=I+BA^*$$

Le reste de la proposition se déduit de (2.7), (2.8), (2.9) et (2.10).

Remarque 2.6. Soit $A,B\in\mathcal{C}(H)$; alors:

$g(A,B)<1\Rightarrow(2.4)$, (2.5) et (2.6) avec $\chi(1+A^*B)=0$. En effet $g(A,B)<1\Rightarrow G(A)\cap G(B)^\perp=G(A)^\perp\cap G(B)=\{0\}$ et $G(A)^\perp+G(B)=G(A)+G(B)^\perp=H$. Donc en

particulier

$$\dim N\,(I+A^*B)=\dim N\,(I+BA^*)=\dim N\,(I+AB^*)$$
$$=\dim N\,(I+B^*A)=0$$

Remarque 2.7. Soit $A,\ B\in\mathcal{C}(H)$; alors:

$A-B$ est A-compact $\Rightarrow$(2.4), (2.5) et (2.6) avec $\chi\,(1+A^*B)=0$. En effet, l'hypothèse entraîne $A\sim B$, d'où (2.4), (2.5) et (2.6). En outre $I=(I+AA^*)\ R_{A^*}=$ $=R_{A^*}+AS_AA^*S_{A^*}=R_{A^*}+(A-B)\quad S_AA^*S_{A^*}+BS_AA^*S_{A^*}=(A-B)\quad S_AA^*S_{A^*}+$ $+(I+BA^*)\ R_{A^*}$. Donc $\chi\,((I+BA^*)\ R_{A^*})=\chi(I)=0$. Comme $R_{A^*}^{-1}\in\mathcal{F}(H)$

$$\chi\,(I+BA^*)=\chi\,((I+BA^*)\ R_{A^*}R_{A^*}^{-1})=\chi\,((I+BA^*)\ R_{A^*})+\chi\,(R_{A^*}^{-1})$$
$$=0+0=0$$

en utilisant le théorème 2.1 de [4].

Remarque 2.8. Soit $A\in\mathcal{F}(H),\ B\in\mathcal{C}(H)$; alors

$$A\sim B\Rightarrow\chi\,(I+A^*B)=\chi(B)-\chi\,(A)\ .$$

En effet $A\sim B\Rightarrow B\in\mathcal{F}(H)$ d'où $\forall\lambda\in\boldsymbol{C},\ \lambda\neq0,\ A/\lambda,\ B/\lambda\in\mathcal{F}(H)$ et $A/\lambda\sim B/\lambda$ et par conséquent $|\lambda|^2+A^*B\in\mathcal{F}(H)$. Comme $A^*B\in\mathcal{F}(H)$, et en vertu du théorème 0.2 du corollaire 1.3 et de (0.3) on voit que

$$\chi\,(I+A^*B)=\chi\,(A^*B)=\chi(B)-\chi(A)\ .$$

§ 3. L'Equivalence compacte forte

Proposition 3.1. *Soit $A,\ B\in\mathcal{C}(H),\ T\in\mathcal{L}(H)$; alors*

(3.1) $\qquad A\sim B\Rightarrow A+T\sim B+T\ .$

D e m o n s t r a t i o n. Soit $\{f_n,g_n\}$ une suite bornée dans $H\times H$. Avec les notations de la proposition 1.5, il existe pour chaque n un unique $u_n\in H$ tel que $\{S_Au_n,\ (A+$ $+T)\ S_Au_n\}=P_{G(A+T)}\ \{f_n,g_n\}$; avec $\|u_n\|\leqq\varrho\ \|\{f_n,g_n\}\|$. Donc $\{u_n\}$ est une suite bornée dans H. D'après la remarque 2.3. $BS_BS_A-S_{B^*}AS_A$ est compact. Il existe donc une sous-suite – notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité – telle que $\{(BS_BS_A-S_{B^*}AS_A)\ u_n\}$ soit une suite de CAUCHY et donc, en utilisant (1.9)

$$(I-P_{G(B+T)})\ P_{G(A+T)}\ \{f_n,g_n\}$$

est également une suite de CAUCHY. Par conséquent $(I-P_{G(B+T)})\ P_{G(A+T)}$ est compact et en utilisant la symétrie des hypothèses en A et B et de nouveau la remarque 2.3. la proposition est démontrée.

Corollaire 3.1. Soit $A,\ B\in\mathcal{C}(H)$; alors:

(3.2) $\qquad A\sim B\Rightarrow\forall\lambda\in\boldsymbol{C}\ A-\lambda I\sim B-\lambda I\quad$ d'où $\quad A\sim B\Rightarrow\varrho_e(A)=\varrho_e(B)\ .$

Proposition 3.2. *Soit $A,\ B\in\mathcal{C}(H),\ A\sim B$; alors $W(A\,;\,B)=I-R_A-R_B+2R_AR_B$ est un opérateur inversible de $\mathcal{L}(H)$.*

Demonstration.

$$I-R_A-R_B+2R_AR_B=I-2R_A(I-R_A)+R_A-R_B-2R_A(R_A-R_B)$$
$$=I-2A^*R_{A^*}AR_A+(I-2R_A)(R_A-R_B).$$

En vertu de (1.4) $I-2A^*R_{A^*}AR_A \geqq \frac{1}{2} I$ est inversible, donc de Fredholm et d'après la remarque 2.2 R_A-R_B (et par conséquent $(I-2R_A)(R_A-R_B)$) est compact. Alors le théorème 0.1 entraîne que $W(A;B)\in\mathfrak{F}(H)\cap\mathfrak{L}(H)$ et $\chi(W(A;B))=0$.

Soit maintenant $u\in N(W(A;B))$. Alors:

$$(I-R_B)u=B^*BR_Bu=R_A(I-2R_B)u\in D(A^*A).$$

Donc

$$A^*AB^*BR_Bu=(I-R_A)(I-2R_B)u=W(A;B)u-R_Bu=-R_Bu$$

d'où

$$R_Bu\in N(I+A^*AB^*B) \quad \text{et} \quad A^*AB^*BR_Bu\in D(B)$$

Donc

$$0=B(I+A^*AB^*B)R_Bu=(I+BA^*(BA^*)^*)BR_Bu$$

puisque

$$A\sim B\Rightarrow BA^*\in\mathcal{C}(H) \quad \text{et} \quad (BA^*)^*=AB^*$$

Donc

$$BR_Bu\in N(I+BA^*(BA^*)^*)=\{0\}$$
$$\Rightarrow R_Bu=0\Rightarrow u=0 \quad \text{d'où} \quad N(W(A;B))=\{0\}.$$

Comme $\chi(W(A;B))=0$, $R(W(A;B))=H$ et la proposition est démontrée.

Remarque 3.1. A partir de la proposition 1.3 on voit que $W(A;B)$ est une application continue de $\mathcal{C}(H)\times\mathcal{C}(H)$ dans $\mathfrak{L}(H)$.

Proposition 3.3. *Soit A, $B\in\mathcal{C}(H)$; alors*

$$A\sim B\Rightarrow A^*R_{BA^*}=R_B(W(A;B))^{-1}A^*R_{A^*}. \tag{3.3}$$

Demonstration. $\forall u\in H$ $A^*R_{BA^*}u\in D(AB^*B)\subseteqq D(B^*B)$. Donc $R_B^{-1}A^*R_{BA^*}u$ existe et

$$(2R_A-I)A^*R_{BA^*}u+(I-R_A)R_B^{-1}A^*R_{BA^*}u$$
$$=(2R_A-I+I-R_A)A^*R_{BA^*}u+(I-R_A)B^*BA^*R_{BA^*}u$$
$$=A^*R_{A^*}R_{BA^*}u+A^*R_{A^*}(I-R_{BA^*})u=A^*R_{A^*}u$$

Donc

$$A^*R_{A^*}u=[(2R_A-I)R_B+I-R_A]R_B^{-1}A^*R_{BA^*}u$$

ou encore $A^*R_{A^*}u=W(A;B)R_B^{-1}A^*R_{BA^*}u$ ce qui entraîne le résultat annoncé.

Corollaire 3.1. Soit A, $B\in\mathcal{C}(H)$; alors

$$A\sim B\Rightarrow\|A^*S_{BA^*}\|^2\leqq\|(W(A;B))^{-1}\|. \tag{3.4}$$

Demonstration. Soit $u \in D(A)$. Alors

$$A^* R_{BA^*} A u = R_B(W(A; B))^{-1} (I - R_A) u = A^* S_{BA^*} S_{BA^*} A u$$

Donc

$$\|S_{BA^*} A u\|^2 \leqq \|u\| \; \| R_B(W(A; B))^{-1} (I - R_A) u \|$$

Or

$$S_{BA^*} A u = (A^* S_{BA^*})^* u$$

Donc

$$\|A^* S_{BA^*}\|^2 = \|(A^* S_{BA^*})^*\|^2 \leqq \| (W(A; B))^{-1} \| .$$

Proposition 3.4. *Soit $A, B, C, D \in \mathcal{C}(H)$ tels que DC^*, BA^* existent dans $\mathcal{C}(H)$ avec $(DC^*)^* = CD^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$; alors:*

$$\forall u \, \forall v \in H: ((BA^* S_{BA^*} S_{DC^*} - S_{AB^*} DC^* S_{DC^*}) u, v)$$

(3.5)
$$= ((A^* S_{A^*} S_{C^*} - S_A C^* S_{C^*}) S_{C^*}^{-1} S_{DC^*} u, S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v)$$
$$+ ((B S_B S_D - S_{B^*} D S_D) S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u, S_{B^*}^{-1} S_{AB^*} v) .$$

Demonstration.

$$((BA^* S_{BA^*} S_{DC^*} - S_{AB^*} DC^* S_{DC^*}) u, v)$$
$$= (S_{DC^*} u, AB^* S_{AB^*} v) - (DC^* S_{DC^*} u, S_{AB^*} v)$$
$$= (S_{DC^*} u, A S_A \cdot S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v) - (D S_D S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u, S_{AB^*} v)$$
$$= (A^* S_{A^*} S_{DC^*} u, S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v) - (S_A C^* S_{DC^*} u, S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v)$$
$$+ (S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u, S_D B^* S_{AB^*} v) - (S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u, D^* S_{D^*} S_{AB^*} v)$$
$$= ((A^* S_{A^*} S_{C^*} - S_A C^* S_{C^*}) S_{C^*}^{-1} S_{DC^*} u, S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v)$$
$$+ (S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u, (S_D B^* S_{B^*} - D^* S_{D^*} S_{B^*}) S_{B^*}^{-1} S_{AB^*} v)$$

d'où on déduit (3.5).

Proposition 3.5. *Soit $A, B, C, D \in \mathcal{C}(H)$; alors:*

(3.6)
$$A \sim B, \quad C \sim D \Rightarrow \delta(DC^*, BA^*)$$
$$\leqq \max \{\delta(A, C), \delta(D, B)\} (1 + \|(W(A; B))^{-1}\| + \|(W(C; D))^{-1}\|) .$$

Demonstration. En prenant $v = (BA^* S_{BA^*} S_{DC^*} - S_{AB^*} DC^* S_{DC^*}) u$ dans (3.5) on trouve:

$$\|v\|^2 \leqq \delta(C^*, A^*) \|S_{C^*}^{-1} S_{DC^*} u\| \|S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v\|$$
$$+ \delta(D, B) \|S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u\| \|S_{B^*}^{-1} S_{AB^*} v\|$$
$$\leqq \max \{\delta(A, C), \delta(D, B)\} (\|S_{DC^*} u\|^2 + 2 \|C^* S_{DC^*} u\|^2$$
$$+ \|DC^* S_{DC^*} u\|^2)^{\frac{1}{2}} (\|S_{AB^*} v\|^2 + 2 \|B^* S_{AB^*} v\|^2 + \|AB^* S_{AB^*} v\|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

En utilisant (1.6) et le corollaire 3.1

$$\|v\|^2 \leqq \max \{\delta(A, C), \delta(D, B)\} (\|u\|^2 + 2 \|(W(C; D))^{-1}\| \|u\|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\|v\|^2 + 2 \|(W(B; A))^{-1}\| \|v\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore: $\|v\| \leqq \max\{\delta(A, C), \delta(D, B)\}\ (1+\|(W(A; B))^{-1}\|+\|(W(C; D)^{-1}\|)\|u\|$ d'où se déduit la proposition car $W(A; B)=(W(B; A))^*$.

Corollaire 3.2. Soit $A, B, C, D \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$(3.7)\qquad A\sim B,\quad C\sim D \Rightarrow g(BA^*, DC^*) \leqq \max\{g(A, C), g(B, D)\}\ (1+\|(W(A; B))^{-1}\|+\|(W(C; D))^{-1}\|)\,.$$

Corollaire 3.3. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$(3.8)\qquad A\sim B \Rightarrow g(BA^*, (B-\lambda I)(A^*-\bar\lambda I)) \leqq |\lambda|\ (1+\|(W(A; B))^{-1}\| + \|(W(A-\lambda I; B-\lambda I))^{-1}\|)\,.$$

Demonstration. En prenant $C=A-\lambda I$; $D=B-\lambda I$ dans (3.7) et en utilisant (0.3).

Proposition 3.6. *Soit* $A, B \in \mathcal{C}(H)$; *alors*

$$A\sim B \Rightarrow \begin{cases} \forall \lambda \in \boldsymbol{C}\ \chi\,(I+(B-\lambda I)(A^*-\bar\lambda I))=\chi\,(I+BA^*)\\ \forall \lambda \in \varrho_e(A)=\varrho_e(B)\ \ \chi\,(B-\lambda I)=\chi\,(A-\lambda I)+\chi\,(I+BA^*)\,.\end{cases}$$

Demonstration. Soit $\lambda_0 \in \boldsymbol{C}$. Alors la remarque 3.1 et (3.8) entrainent que si $\varepsilon>0$ il existe un $\delta>0$ tel que $|\lambda-\lambda_0|<\delta \Rightarrow \|(W(A-\lambda I; B-\lambda I))^{-1}\| \leqq 2\,\|(W(A-\lambda_0 I; B-\lambda_0 I))^{-1}\|$ et $g((B-\lambda_0 I)(A^*-\bar\lambda_0 I), (B-\lambda I)(A^*-\bar\lambda I))<\varepsilon$. En utilisant maintenant le corollaire 1.3 et en posant $\gamma=c\,(I+(B-\lambda_0 I)(A^*-\bar\lambda_0 I))>0$ on voit qu'il existe $\delta>0$ tel que:

$$|\lambda-\lambda_0|<\delta \Rightarrow g\,((I+(B-\lambda_0 I)(A^*-\bar\lambda_0 I)), (I+(B-\lambda I)(A^*-\bar\lambda I))) < \gamma/\sqrt{1+\gamma^2}$$

d'où en vertu du théorème 0.2 on déduit que $\chi\,(I+(B-\lambda I)(A^*-\bar\lambda I))$ est localement constant sur $\boldsymbol{C}$ et donc constant (et par conséquent égal à $\chi\,(1+BA^*)$).

En outre si $\lambda \in \varrho_e(A)=\varrho_e(B)$ et en utilisant la remarque 2.8 on trouve:

$$-\chi\,(A-\lambda I)+\chi\,(B-\lambda I)=\chi\,((B-\lambda I)(A^*-\bar\lambda I)) =\chi\,(I+(B-\lambda I)(A^*-\bar\lambda I))=\chi\,(I+BA^*)\,.$$

Proposition 3.7. *Soit* $A, B, C \in \mathcal{C}(H)$; *alors*

$$(3.9)\qquad A\sim B\sim C \Rightarrow \chi\,(I+AB^*)+\chi\,(I+BC^*)+\chi\,(I+CA^*)=0\,.$$

Demonstration. (3.5) peut également s'écrire:

$$\begin{aligned} &BA^*S_{BA^*}S_{DC^*}-S_{AB^*}DC^*S_{DC^*}\\ &=(S_A^{-1}B^*S_{AB^*})^*\,(A^*S_{A^*}S_{C^*}-S_AC^*S_{C^*})\,S_{C^*}^{-1}S_{DC^*}\\ &\quad+(S_{B^*}^{-1}S_{AB^*})^*\,(BS_BS_D-S_{B^*}DS_D)\,S_D^{-1}C^*S_{DC^*}\,.\end{aligned}$$

En faisant les substitutions appropriées, on en déduit:

$$\begin{aligned} &BA^*S_{BA^*}S_{CA^*}-S_{AB^*}CA^*S_{CA^*}\\ &=(S_{B^*}^{-1}S_{AB^*})^*\,(BS_BS_C-S_{B^*}CS_C)\,S_C^{-1}A^*S_{CA^*}\end{aligned}$$

$$CA^*S_{CA^*}S_{BA^*} - S_{AC^*}BA^*S_{BA^*}$$
$$= (S_{C^*}^{-1}S_{AC^*})^* (CS_CS_B - S_{C^*}BS_B) S_B^{-1}A^*S_{BA^*}$$

d'où

(3.10) $\quad B \sim C \Rightarrow BA^* \sim CA^*.$

De même on trouve:

$$A^*AS_{A^*A}S_{C^*B} - S_{A^*A}C^*BS_{C^*B}$$
$$= (S_{A^*}^{-1}AS_{A^*A})^* (AS_AS_B - S_{A^*}BS_B) S_B^{-1}S_{C^*B}$$
$$+ (S_A^{-1}S_{A^*A})^* (A^*S_{A^*}S_{C^*} - S_AC^*S_{C^*}) S_{C^*}^{-1}BS_{C^*B}$$

et

$$C^*BS_{C^*B}S_{A^*A} - S_{B^*C}A^*AS_{A^*A}$$
$$= (S_{B^*}^{-1}CS_{B^*C})^* (BS_BS_A - S_{B^*}AS_A) S_A^{-1}S_{A^*A}$$
$$+ (S_C^{-1}S_{B^*C})^* (C^*S_{C^*}S_{A^*} - S_CA^*S_{A^*}) S_{A^*}^{-1}AS_{A^*A}$$

d'où

(3.11) $\quad A \sim B, \quad A \sim C \Rightarrow A^*A \sim C^*B.$

De (3.10) et (3.11) on déduit: $I + A^*AB^*C$, $I + CA^*AB^* \in \mathcal{F}(H)$. En outre, si $u \in N\,(I + A^*AB^*C)$ alors $u \in D(C)$ et $Cu \in N\,(I + CA^*AB^*)$. Donc $C\colon N\,(I + A^*AB^*C) \to N\,(I + CA^*AB^*)$ et il est facile de voir que cette application est bijective. Donc $\dim N\,(I + CA^*AB^*) = \dim N\,(I + A^*AB^*C)$. De même $\dim N\,(I + C^*BA^*A) = \dim N\,(I + BA^*AC^*)$ d'où $\chi\,(I + A^*AB^*C) = \chi\,(I + CA^*AB^*)$. Or $-1 \in \varrho_e\,(C^*B) = \varrho_e\,(A^*A)$. Donc en utilisant la proposition 3.6

$$\chi\,(I + A^*AB^*C) = \chi\,(I + A^*A) - \chi\,(I + C^*B) = -\chi\,(I + C^*B)$$
$$= -\chi\,(I + BC^*)\,.$$

De même $-1 \in \varrho_e(CA^*) = \varrho_e(BA^*)$, donc comme plus haut:
$\chi\,(I + CA^*AB^*) = \chi\,(I + CA^*) - \chi\,(I + BA^*)$ et finalement:
$-\chi\,(I + BC^*) = \chi\,(I + CA^*) + \chi\,(I + AB^*)$ et la proposition est démontrée.

Definition 3.1. Soit A, $B \in \mathcal{C}(H)$. Nous dirons que A et B sont fortement compact-équivalents (et nous écrirons $A \approx B$) si $A \sim B$ et $\chi\,(I + AB^*) = 0$.

Proposition 3.8. *$\approx$ est une relation d'équivalence.*

Demonstration. Le réflexivité et la symétrie sont évidentes. La transitivité se déduit immédiatement de (3.9).

Remarque 3.2. Soit A, $B \in \mathcal{C}(H)$. Alors si $A - B$ est A-compact $A \approx B$. (Conséquence immédiate de la définition et de la remarque 2.7).

Remarque 3.3. Soit A, $B \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$A \approx B \Rightarrow \begin{cases} A^* \approx B^* \\ \forall \lambda \in \mathbf{C}\ \lambda A \approx \lambda B\,. \end{cases}$$

Remarque 3.4. Soit A, $B \in \mathcal{C}(H)$; alors:

$$A \approx B \Rightarrow \forall \lambda \in \varrho_e(A) = \varrho_e(B), \quad \chi\,(A - \lambda I) = \chi\,(B - \lambda I)$$

(conséquence immédiate de la proposition 3.6). Réciproquement

$$A \sim B \quad \text{et} \quad \exists \lambda \in \varrho_e(A) = \varrho_e(B) \quad \text{tel que} \quad \chi(A - \lambda I) = \chi(B - \lambda I) \Rightarrow A \approx B .$$

Theoreme 3.1. (*Deuxième théorème de stabilité*)

$$\forall A \in \mathcal{F}(H), \quad \forall B \in \mathcal{C}(H)$$

$$A \approx B \Rightarrow B \in \mathcal{F}(H), \quad \chi(B) = \chi(A) .$$

Demonstration. Conséquence immédiate des propositions 2.6 et 3.6.

§ 4. Applications

La notion d'équivalence compacte (forte ou faible) permet d'étendre à $\mathcal{C}(H)$ un certain nombre de résultats et de notions associés à $\mathfrak{L}(H)$.

Definition 4.1. $A \in \mathcal{C}(H)$ est essentiellement normal si et seulement si $A^*A \sim \sim AA^*$.

Remarque 4.1. Il est facile de voir que $A^*A \sim AA^*$ si et seulement si $A^*A \approx \approx AA^*$.

Proposition 4.1 (*cf.* [15]). *A est essentiellement normal si et seulement si* $R_A - R_{A^*} \in \mathcal{K}(H)$.

Proposition 4.2 (*cf.* [13], [15]). *Soit* $A \in \mathcal{C}(H)$, *essentiellement normal. Alors:*

$$\forall \lambda \in \varrho_e(A), \quad \chi(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{C}(H),$$

normal tel que $A \approx N$.

La démonstration de ces deux propositions est dans [15] de même que celle du corollaire suivant.

Corollaire 4.1. L'ensemble $\{A \in \mathcal{C}(H) \mid \exists N \in \mathcal{C}(H)$ normal tel que $A \approx N\}$ est fermé dans $\mathcal{C}(H)$. La proposition 4.2 admet la variante suivante:

Proposition 4.3. *Soit* $A \in \mathcal{C}(H)$, *essentiellement normal. Alors* $\forall \lambda \in \varrho_e(A)$, $\chi(A - \lambda I) = \text{constante} \Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{C}(H)$, *normal tel que* $A \sim N$.

Remarque 4.2. La condition de gauche de cette proposition ainsi que celle de la proposition 4.2 est toujours vérifiée lorsque $\varrho_e(A) = \varnothing$. C'est également le cas dans la proposition 4.3 lorsque $\varrho_e(A)$ est connexe.

Les résultats suivants seront énoncés plus en détail et démontrés dans un travail ultérieur à paraître.

Proposition 4.4. *Soit* $A \in \mathcal{C}(H)$, *essentiellement normal. Alors* $D(A^\infty) = \bigcap_{n \geq 0} D(A^n)$ *est dense dans H*

et $\quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n \in \mathcal{C}(H)$.

En considérant le quotient de $\mathcal{C}(H)$ par la relation d'équivalence $\approx$ on obtient un espace métrique contenant l'algèbre de Calkin (cf. [7]) associée à H comme

sous-ensemble ouvert et dense. Chaque classe d'équivalence est un sous-ensemble fermé et connexe de $\mathcal{C}(H)$.

Enfin on peut étendre à $\mathcal{C}(H)$ les résultates de [1] et [18] sur $\mathcal{L}(H)$ concernant la « correction » par perturbations compactes du spectre d'un opérateur.

Bibliographie

[1] C. Apostol, The correction by compact perturbation of the singular behavior of operators. Rev. Roum. Math. P. et Appl. XXI (Nº 2) (1976) 155–175

[2] F. V. Atkinson, La solvabilité normale d'équation linéaires dans des espaces normés. Math. Sbornik N.S. **28** (70) (1951) 3–14 (en Russe)

[3] L. Brown, R. G. Douglas, P. A. Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators . . . Lect. Notes Math. Nº **345** (1973) 58–127

[4] H. O. Cordes, J. Ph. Labrousse, The invariance of the index in the metric space of closed operators. J. Math. and Mech. **12** (5) (1963) 693–720

[5] P. A. Fillmore, J. P. Williams, On operator ranges. Adv. in Math. **7** (3) (1971) 254–281

[6] S. Goldberg, Unbounded linear operators. Mc Graw Hill (New York) (1966)

[7] P. De la Harpe, Initiation à l'algèbre de Calkin. Lect. Notes in Math. Nº **725** (1978) 180–219

[8] T. Kato, Perturbations theory for linear operators. Springer-Verlag (New York) (1966)

[9] M. G. Krein, M. A. Krasnoselski, Théorèmes fondamentaux sur l'extension d'opérateurs hermitiens. Usp. Mat. Nauk **2** (3) (19) (1947) 60–106 (en Russe)

[10] –, Stabilité de l'indice d'un opérateur non borné. Math. Sbornik N. S. **30** (72) (1952) 219–224 (en Russe)

[11] J. Ph. Labrousse, On a metric space of closed operators on a Hilbert space. Rev. Mat. Fis. Teorica. Univ. N. Tucuman (Argentine) XVI (1 et 2) (1966) 45–77

[12] –, Quelques topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. Dept. de Math. Univ. de Nice (1970)

[13] –, Une caractérisation topologique des générateurs infinitésimaux . . . Acad. Naz. Lincei LII (5) (1972) 631–636

[14] –, Les opérateurs quasi-Fredholm. Rend. Circ. Mat. Palermo (Ser. II) XXIX (1980) 161–258

[15] B. Mercier, Généralisation d'un théorème de Brown-Douglas-Fillmore (Thèse) Dept. de Math. Univ. de Nice (1984)

[16] B. Sz-Nagy, On the stability of the index of unbounded linear transformations. Act. Math. Acad. Sci. Hung. **3** (1952) 49–52

[17] F. Riesz, B. Sz-Nagy, Leçons d'analyse fonctionnelle. Akad. Kiado (Budapest) (1952)

[18] J. G. Stampfli, Compact perturbations, normal eigenvalues and a problem of Salinas. J. London Math. Soc. (2) (1974) 165–175

[19] M. H. Stone, On unbounded operators in a Hilbert space. J. Indian Math. Soc. **15** (1951) 155–192

Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
06034 NICE Cedex
France